1 Aufgabe 1

1.1 Teilaufgabe 1c)

(3) kleinere Basis wird von größerer Basis beschränkt($a^x = \mathcal{O}(b^x) \Leftrightarrow |a| \leq |b|$):

- Falls $a = 0$ ist der Beweis trivial, da Null von allen monoton steigenden Funktionen asymptotisch nach oben beschränkt wird. Für alle Fälle $a < 0$ und/oder $b < 0$ siehe Gegenbeispiele unten. Im Folgenden beweisen dir die Äquvalenz deshalb nur für $a, b > 0$.

$$
\begin{aligned}
|a| \leq |b| \Leftrightarrow 1 \leq \frac{|b|}{|a|} = \frac{b}{a} \\
&\Leftrightarrow \forall y \geq 0 : 1^y \leq \left(\frac{b}{a}\right)^y \\
&\Leftrightarrow \exists x_0 : \forall x \geq x_0 : 1^{x-x_0} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{x-x_0} \\
&\Leftrightarrow \exists x_0 : \forall x \geq x_0 : 1 \leq \underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^{-x_0}}_{=c_0} \left(\frac{b}{a}\right)^x \\
&\Leftrightarrow \exists x_0, c_0 : \forall x \geq x_0 : a^x \leq c_0 b^x \\
&\Leftrightarrow a^x = \mathcal{O}(b^x)
\end{aligned}
$$

- Nimm nun an, dass $a > 0$, $b < 0$ und $|a| \leq |b|$. Wenn $a^x = \mathcal{O}(b^x)$, dann finden wir ein x_0 und ein c_0, sodass für alle $x > x_0$:

$$
\begin{aligned}
a^x \leq c_0 b^x &\Leftrightarrow |a|^x \leq (-1)^x c_0 \, |b|^x \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^x \leq (-1)^x c_0
\end{aligned}
$$

Nun wählen wir $x = 2n$ für $n \in \mathbb{N}$ und sehen wegen $|a| \leq |b|$

$$
\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^{2n+1} \leq \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^{2n} \leq c \tag{1}
$$

Ebenfalls für $x = 2n + 1$

$$
\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^{2n+1} \leq -c \qquad \Leftrightarrow \qquad c \leq -\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^{2n+1}
$$

Dies ist mit (1) ein offensichtlicher Widerspruch. Da wir für jedes x_0 ein $2n > x_0$ finden können, ist $a^x = \mathcal{O}(b^x)$ nicht möglich. Analoges folgt für $a < 0$ und $b > 0$.

- Nun nimm an, dass $a < 0$ und $b < 0$. Wir sehen wieder für $x = 2n$ und $x = 2n + 1$:

$$
|a|^{2n} = a^{2n} \leq c_0 b^{2n} = c_0 \, |b|^{2n}
$$

beziehungsweise

$$-|a|^{2n+1} = a^{2n+1} \leq c_0 b^{2n+1} = c_0 - |b|^{2n+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad |b|^{2n+1} c_0 \leq |a|^{2n+1}$$

Dies bedeutet

$$\frac{|a|^{2n}}{|b|^{2n}} \leq c_0 \leq \frac{|a|^{2n+1}}{|b|^{2n+1}} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \leq \frac{|a|}{|b|} \qquad \Leftrightarrow \qquad |b| \leq |a|$$

— ebenfalls ein offensichtlicher Widerspruch.

Notizen:

- Man kann nicht annehemen, dass c_0 oder x_0 einen festen Wert habe um den Schritt

  $$R(x) = \mathcal{O}(f(x)) \Rightarrow \text{irgendeine Bedingung}$$

  zu führen, da die Bedingung für alle c_0 oder x_0 folgen muss.

- Um dies zu sehen, betrachte $\exists x_0 : \forall x > x_0 : x > 4 \Rightarrow x > 5$. Hier wäre die Bedingung $x > 5$ für ein gewähltes $x_0 = 5$ erfüllt, für $x_0 = 4$ (und damit insgesamt) aber offensichtlich nicht.